4. La utilidad

En la época victoriana, los filósofos y los economistas hablaban alegremente de la "utilidad" como indicador del bienestar general de las personas. Se consideraba una medida numérica de la felicidad del individuo. Dada esta idea, era natural imaginar que los consumidores tomaban sus decisiones con vistas a maximizar su utilidad, es decir, a ser lo más felices posible.

El problema estriba en que estos economistas clásicos nunca describieron realmente cómo se medía la utilidad. ¿Cómo se supone que debemos cuantificar la "cantidad" de utilidad de las diferentes elecciones? ¿Es la utilidad lo mismo para una persona que para otra? ¿Qué quiere decir que una chocolatina me reporta el doble de utilidad que una zanahoria? ¿Tiene el concepto de utilidad algún significado independiente, de no ser el de ser lo que maximizan los individuos?

Debido a estos problemas conceptuales, los economistas han abandonado la anticuada idea de la utilidad como medida de la felicidad y han reformulado totalmente la teoría de la conducta del consumidor en función, ahora, de sus **preferencias**. Se considera que la utilidad no es más que una *forma de describirlas*.

Los economistas se han dado cuenta gradualmente de que lo único importante de la utilidad, en lo que a la elección se refiere, es si una cesta tiene una mayor utilidad que otra y no el grado en que una utilidad es mayor que otra. Antes, las preferencias se definían en función de la utilidad: decir que se prefería la cesta (x_1, x_2) a la (y_1, y_2) significaba que la X tenía una mayor utilidad que la Y. Sin embargo, hoy tendemos a ver las cosas de otra forma. Las *preferencias* del consumidor son la descripción fundamental para analizar la elección, y la utilidad no es más que una forma de describirlas.

Una **función de utilidad** es un instrumento para asignar un número a todas las cestas de consumo posibles de tal forma que las que se prefieren tengan un número más alto que las que no se prefieren. Es decir, la cesta (x_1, x_2) se prefiere a la (y_1, y_2) si y sólo si la utilidad de la primera es mayor que la utilidad de la segunda; en símbolos, $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ si y sólo si $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$.

La única propiedad importante de una asignación de utilidad es la forma en que *ordena* las cestas de bienes. La magnitud de la función de utilidad sólo es relevante en

la medida en que nos permite determinar el *puesto* relativo que ocupan las diferentes cestas de consumo; la magnitud de la diferencia de utilidad entre dos cestas de consumo cualesquiera no importa. Este tipo de utilidad se denomina **utilidad ordinal** debido a que pone el énfasis en la ordenación de las cestas de bienes.

Consideremos, por ejemplo, el cuadro 4.1, en el que mostramos varias formas de asignar utilidades a tres cestas de bienes, que las ordenan de la misma manera. En este ejemplo, el consumidor prefiere la A a la B y la B a la C. Todas las formas de asignación indicadas son funciones de utilidad válidas que describen las mismas preferencias porque todas tienen la propiedad de que asignan a la A un número más alto que a la B, a la cual asignan, a su vez, un número más alto que a la C.

Cesta	U_1	U_2	U_3
A	3	17	– 1
B	2	10	– 2
C	1	0,002	– 3

Cuadro 4.1. Diferentes formas de asignar utilidades.

Dado que sólo importa la ordenación de las cestas de bienes, no puede haber una sola manera de asignarles utilidades. Si podemos encontrar una forma de asignar cifras de utilidad a cestas de bienes, podremos también hallar un número infinito de formas de hacerlo. Si $u(x_1, x_2)$ representa una forma de asignar cifras de utilidades a las cestas (x_1, x_2), multiplicar $u(x_1, x_2)$ por 2 (o por cualquier otro número positivo) es una forma igualmente buena de asignarlas.

La multiplicación por 2 es un ejemplo de **transformación monótona**: transforma una serie de números en otra de tal manera que se mantenga el orden de éstos.

Normalmente, las transformaciones monótonas se representan mediante una función $f(u)$ que cambia cada número u por algún otro número $f(u)$, de tal manera que se mantiene el orden de los números en el sentido de que $u_1 > u_2$ implica que $f(u_1) > f(u_2)$. Una transformación monótona y una función monótona son esencialmente lo mismo.

Ejemplos de transformación monótona son la multiplicación por un número positivo (por ejemplo, $f(u) = 3u$), la suma de cualquier número (por ejemplo, $f(u) = u + 17$), la elevación de u a una potencia impar (por ejemplo, $f(u) = u^3$), etc.[1]

[1] Lo que llamamos "transformación monótona" se denomina, estrictamente hablando, "transformación monótonamente creciente", para distinguirla de la "transformación monótonamente decreciente" que es aquella que *invierte* el orden de los números. El término "transformaciones monótonas" es un tanto injusto, ya que estas transformaciones pueden ser, de hecho, muy interesantes.

La tasa de variación de $f(u)$ provocada por una variación de u puede medirse observando la variación que experimenta f entre dos valores de u, dividida por la variación de u:

$$\frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}.$$

En el caso de una transformación monótona, $f(u_2) - f(u_1)$ siempre tiene el mismo signo que $u_2 - u_1$. Por lo tanto, una función monótona siempre tiene una tasa de variación positiva, lo que significa que el gráfico de una función de este tipo siempre tiene pendiente positiva, como muestra la figura 4.1A.

Si $f(u)$ es una transformación monótona *cualquiera* de una función de utilidad que representa las preferencias $\succeq$, $f(u(x_1, x_2))$ también es una función de utilidad que representa esas mismas preferencias.

¿Por qué? Por las tres razones siguientes:

1. Decir que $u(x_1, x_2)$ representa las preferencias $\succeq$ significa que $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$ si y sólo si $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$.
2. Pero si $f(u)$ es una transformación monótona, $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$ si y sólo si $f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2))$.
3. Por lo tanto, $f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2))$ si y sólo si $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$, por lo que la función $f(u)$ representa las preferencias $\succeq$ de la misma forma que la función de utilidad original $u(x_1, x_2)$.

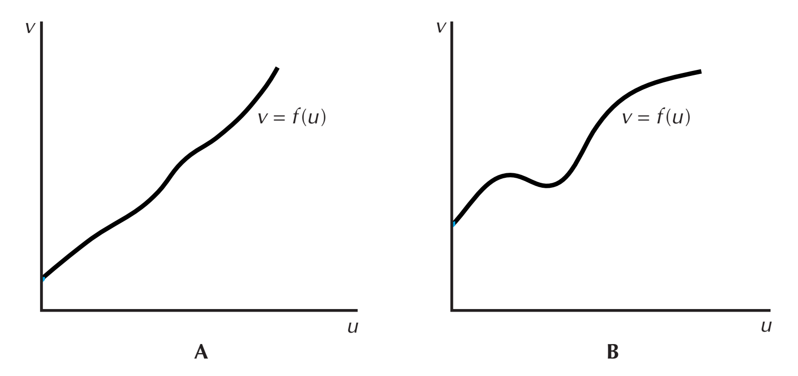


Figura 4.1. Una transformación monótona positiva. La parte A muestra una función monótona, es decir, una función que siempre es creciente. La B muestra una función que no es monótona, ya que unas veces aumenta y otras disminuye.

Resumimos este análisis formulando el siguiente principio: *una transformación monótona de una función de utilidad es una función de utilidad que representa las mismas preferencias que la función de utilidad original.*

Desde el punto de vista geométrico, una función de utilidad es una forma de denominar las curvas de indiferencia. Dado que todas las cestas de una curva de indiferencia deben tener la misma utilidad, una función de utilidad es un instrumento para asignar números a las distintas curvas de indiferencia de tal manera que las más altas reciban números más altos. Desde este punto de vista, una transformación monótona equivale exactamente a denominar de nuevo las curvas de indiferencia. Mientras las curvas de indiferencia que contengan las cestas que se prefieren reciban un número más alto que las que contienen las cestas que no se prefieren, las denominaciones representarán las mismas preferencias.

4.1 La utilidad cardinal

Existen algunas teorías de la utilidad que consideran importante su magnitud y que se conocen como teorías de la utilidad cardinal. En una teoría de **la utilidad cardinal**, se supone que la magnitud de la diferencia de utilidad entre dos cestas tiene algún tipo de significado.

Sabemos cómo se averigua si una persona dada prefiere una cesta de bienes a otra: es suficiente darle a elegir entre las dos y ver cuál escoge. Por lo tanto, sabemos cómo se asigna una utilidad ordinal a las dos cestas de bienes: basta con asignar una utilidad mayor a la elegida que a la rechazada. Toda asignación que proceda de este modo es una función de utilidad. Tenemos, pues, un criterio práctico para saber si una cesta tiene para una persona una mayor utilidad que otra.

Pero ¿cómo sabemos si a una persona le gusta una cesta el doble que otra? ¿Cómo puede saber incluso una misma persona si *le* gusta una cesta el doble que otra?

Podrían proponerse varias definiciones de este tipo de asignación: me gusta una cesta el doble que otra si estoy dispuesto a pagar el doble por ella; o me gusta una cesta el doble que otra si estoy dispuesto a recorrer el doble de distancia para conseguirla o a esperar el doble de tiempo o a apostar por ella, cuando la probabilidad de conseguirla es la mitad.

Ninguna de estas definiciones es incorrecta; cada una de ellas asignaría los niveles de utilidad de tal manera que la magnitud de los números asignados tuviera alguna importancia práctica. Pero tampoco son muy correctas. Aunque cada una de ellas es una interpretación posible de lo que significa querer una cosa el doble que otra, ninguna es especialmente convincente.

Incluso aunque encontráramos un método para asignar niveles de utilidad que resultara totalmente satisfactorio, ¿qué nos aportaría para describir las elecciones del consumidor? Para saber qué cesta se elegirá, basta saber cuál se prefiere, cuál tiene la mayor utilidad. Saber en qué medida es mayor no añade nada a nuestra descripción de la elección. Dado que la utilidad cardinal no es necesaria para describir las

elecciones de los consumidores y que, de todos modos, no existe ningún método para asignar utilidades cardinales, nos quedaremos con un modelo de utilidad puramente ordinal.

4.2 La construcción de una función de utilidad

Pero ¿estamos seguros de que existe algún mecanismo para asignar utilidades ordinales? Dada una ordenación de las preferencias, ¿podremos encontrar siempre una función de utilidad que ordene las cestas de bienes de la misma forma que esas preferencias? ¿Existe una función de utilidad que describa una ordenación razonable cualquiera de las preferencias?

No todos los tipos de preferencias pueden representarse mediante una función de utilidad. Supongamos, por ejemplo, que una persona tiene preferencias intransitivas de tal manera que $A \succ B \succ C \succ A$. En ese caso, una función de utilidad de estas preferencias tendría que estar formada por los números $u(A)$, $u(B)$ y $u(C)$, de modo que $u(A) > u(B) > u(C) > u(A)$. Pero esto es imposible.

Sin embargo, si excluimos los casos anormales, como las preferencias intransitivas, generalmente podremos encontrar siempre una función de utilidad para representar las preferencias. Mostraremos dos ejemplos en este capítulo y en el capítulo 14.

Supongamos que se nos da un mapa de indiferencia como el de la figura 4.2. Sabemos que una función de utilidad es una forma de etiquetar las curvas de indiferencia de modo que las más altas tengan números más altos. ¿Cómo podemos hacerlo?

Una sencilla forma consiste en trazar la diagonal mostrada y etiquetar cada curva de indiferencia en función de su distancia desde el origen, medida a lo largo de la diagonal.

¿Cómo sabemos que se trata de una función de utilidad? No es difícil ver que si las preferencias son monótonas, la recta que pasa por el origen debe cortar todas las curvas de indiferencia exactamente una vez. Por lo tanto, todas las cestas reciben su etiqueta y las que se encuentran en las curvas de indiferencia más elevadas reciben etiquetas más altas. Y eso es lo único que se necesita para tener una función de utilidad.

De esta manera podemos dar un número a las curvas de indiferencia, siempre que las preferencias sean monótonas. Ésta no es, en todos los casos, la forma más natural de hacerlo, pero, por lo menos, muestra que la noción de “función de utilidad ordinal” es bastante general: casi todos los tipos de preferencias “razonables” pueden representarse mediante una función de utilidad.

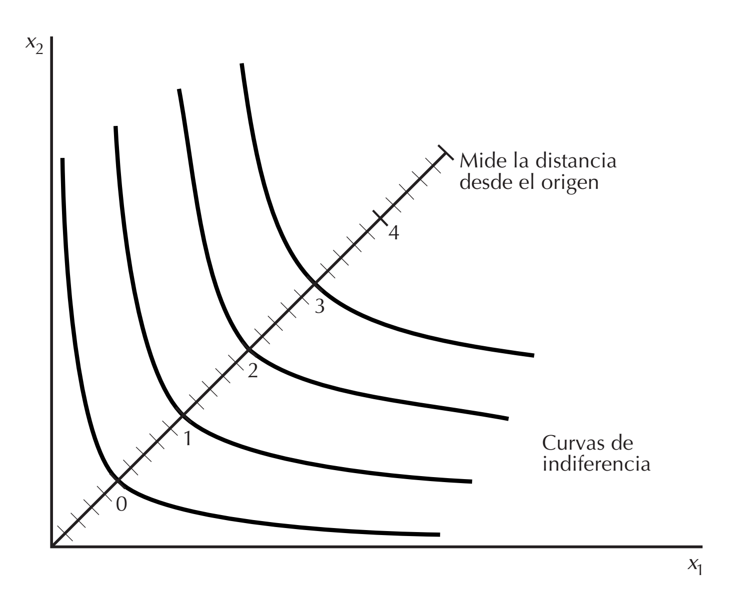


Figura 4.2. Cómo se construye una función de utilidad a partir de las curvas de indiferencia. Primero se traza una diagonal y a continuación se denomina cada curva de indiferencia según la distancia a la que se encuentre del origen, medida a lo largo de la recta.

4.3 Algunos ejemplos de funciones de utilidad

En el capítulo 3 describimos algunos ejemplos de preferencias y las curvas de indiferencia que las representaban. También podemos representar estas preferencias mediante funciones de utilidad. Si tenemos una función de utilidad, $u(x_1, x_2)$, es relativamente fácil trazar curvas de indiferencia: basta dibujar todos los puntos (x_1, x_2) de tal manera que $u(x_1, x_2)$ sea una constante. En matemáticas, el conjunto de todas las (x_1, x_2), tal que $u(x_1, x_2)$ sea una constante, se denomina **conjunto de nivel**. Así obtenemos una curva de indiferencia distinta para cada valor de la constante.

Ejemplo: Cómo se obtienen las curvas de indiferencia a partir de la utilidad

Supongamos que la función de utilidad es $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. ¿Cómo son las curvas de indiferencia?

Sabemos que una curva de indiferencia tipo es el conjunto de todas las x_1, y las x_2 tal que $k = x_1 x_2$. Despejando x_2 como función de x_1, vemos que una curva de indiferencia tipo tiene la fórmula:

$$x_2 = \frac{k}{x_1}.$$

La figura 4.3 representa esta curva en el caso en que $k = 1, 2, 3...$

Veamos otro ejemplo. Supongamos que nos dan la función de utilidad $v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$. ¿Cómo son las curvas de indiferencia? Aplicando las reglas del álgebra, sabemos que

$$v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = u(x_1, x_2)^2.$$

Por lo tanto, la función de utilidad $v(x_1, x_2)$ es el cuadrado de la función de utilidad $u(x_1, x_2)$. Como $u(x_1, x_2)$ no puede ser negativa, $v(x_1, x_2)$ es una transformación monótona de la función de utilidad anterior, $u(x_1, x_2)$. Eso significa que la función de utilidad $v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ tiene que tener unas curvas de indiferencia exactamente iguales que las que muestra la figura 4.3. La denominación de las curvas de indiferencia es distinta —las etiquetas que antes eran 1, 2, 3... ahora son 1, 4, 9...—, pero el conjunto de cestas que tiene $v(x_1, x_2) = 9$ es exactamente el mismo que el que tiene $u(x_1, x_2) = 3$. Por lo tanto, $v(x_1, x_2)$ describe las mismas preferencias que $u(x_1, x_2)$, ya que *ordena* todas las cestas de la misma forma.

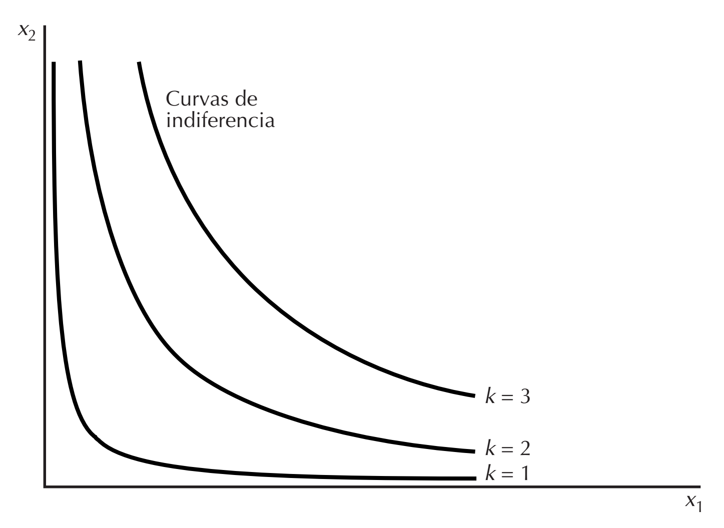


Figura 4.3. Las curvas de indiferencia. Las curvas de indiferencia $k = x_1 x_2$, correspondientes a diferentes valores k.

El caso contrario —hallar una función de utilidad que represente un determinado conjunto de curvas de indiferencia— es algo más difícil. Existen dos formas de hacerlo. La primera es matemática: dadas las curvas de indiferencia, tenemos que en-

contrar una función que sea constante a lo largo de cada una y que asigne valores más altos a las más altas.

La segunda forma es algo más intuitiva: dada una descripción de las preferencias, tratamos de averiguar qué intenta maximizar el consumidor, es decir, qué combinación de bienes describe su conducta. Este procedimiento quizá parezca algo vago a primera vista, pero se entenderá mejor cuando hayamos analizado algunos ejemplos.

Sustitutivos perfectos

¿Recuerda el lector el ejemplo del lápiz rojo y el azul? Al consumidor sólo le importaba el número total de lápices. En consecuencia, es natural medir la utilidad en función del número total de lápices. Por lo tanto, elegimos provisionalmente la función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. ¿Es adecuada esta función? Para responder a esta cuestión hay que preguntarse dos cosas: ¿es constante a lo largo de las curvas de indiferencia?; ¿asigna una etiqueta más alta a las cestas preferibles? Como la respuesta es afirmativa en ambos casos, la función es adecuada.

Naturalmente, ésta no es la única función de utilidad posible. También podríamos utilizar el *cuadrado* del número de lápices. Por lo tanto, la función de utilidad $v(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ también representa las preferencias por los sustitutivos perfectos, como las representaría cualquier otra transformación monótona de $u(x_1, x_2)$.

¿Qué ocurre si el consumidor está dispuesto a sustituir el bien 2 por el 1 a una tasa distinta de 1? Supongamos, por ejemplo, que para compensarlo por la renuncia a una unidad del bien 1 se necesitaran *dos* unidades del 2. Eso significaría que el bien 1 es el *doble* de valioso para el consumidor que el 2. Por lo tanto, la función de utilidad adoptaría la forma $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$. Obsérvese que esta utilidad genera curvas de indiferencia que tienen una pendiente de –2.

En general, las preferencias por los sustitutivos perfectos pueden representarse por medio de una función de utilidad de la forma siguiente:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 .$$

En esta expresión a y b son números positivos que miden el "valor" que tienen los bienes 1 y 2 para el consumidor. Obsérvese que la pendiente de una curva de indiferencia representativa viene dada por $-a/b$.

Complementarios perfectos

Éste es el caso de los zapatos del pie izquierdo y del pie derecho, en el que al consumidor sólo le interesa el número de *pares* de zapatos que tiene, por lo que es natural

elegir dicho número como función de utilidad. El número de pares completos de zapatos que tengamos es el *mínimo* del número de zapatos del pie derecho que tengamos, x_1, y del número de zapatos del pie izquierdo que tengamos, x_2. Por lo tanto, la función de utilidad de los complementarios perfectos tiene la forma $u(x_1, x_2) = \min \{x_1, x_2\}$.

Para verificar si esta formulación es adecuada, escogemos una cesta de bienes como la (10, 10). Si añadimos una unidad más del bien 1, obtenemos (11, 10), que debería estar situada en la misma curva de indiferencia. ¿Sucede así? Sí, ya que $\min\{10, 10\} = \min\{11, 10\} = 10$.

Así pues, $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ es una función de utilidad posible para describir complementarios perfectos. Como siempre, también los describiría cualquier transformación monótona.

¿Qué ocurre en el caso del consumidor que desea consumir los bienes a una tasa distinta de 1? ¿Qué ocurre, por ejemplo, en el caso del consumidor que siempre consume 2 cucharadas de azúcar con cada taza de té? Si x_1 es el número de tazas de té y x_2 es el número de cucharadas de azúcar, el número de tazas de té correctamente azucaradas será $\min\{x_1, x_2/2\}$.

Este caso es algo complejo, por lo que debemos detenernos a examinarlo. Si el número de tazas de té es mayor que la mitad del número de cucharadas de azúcar, sabemos que no podremos echar 2 cucharadas en cada taza. En este caso, sólo estará correctamente azucarada $x_2/2$ taza (el lector puede dar algunos valores numéricos a x_1 y x_2 para convencerse).

Naturalmente, cualquier transformación monótona de esta función de utilidad describirá las mismas preferencias. Por ejemplo, podemos multiplicar por dos las cantidades de los dos bienes para eliminar la fracción. De esa manera obtendremos la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$.

En general, la forma de una función de utilidad que describa las preferencias por los complementarios perfectos es:

$$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\},$$

donde a y b son números positivos que indican las proporciones que se consumen de cada bien.

Preferencias cuasilineales

He aquí unas curvas de indiferencia que tienen una forma que no hemos visto antes. Supongamos que un consumidor tiene unas curvas de indiferencia que son traslaciones verticales unas de otras, como sucede en la figura 4.4. Eso significa que todas las curvas de indiferencia son simplemente "traslaciones" verticales de una curva de

indiferencia, de lo que se desprende que la ecuación de una curva de indiferencia adopta la forma $x_2 = k - v(x_1)$, en la que k es una constante diferente para cada curva de indiferencia. Esta ecuación afirma que la altura de cada curva de indiferencia es una función de x_1, $-v(x_1)$, más una constante k. Cuanto mayores son los valores de k, más altas son las curvas de indiferencia (el signo "menos" sólo es una convención; más adelante veremos por qué es útil).

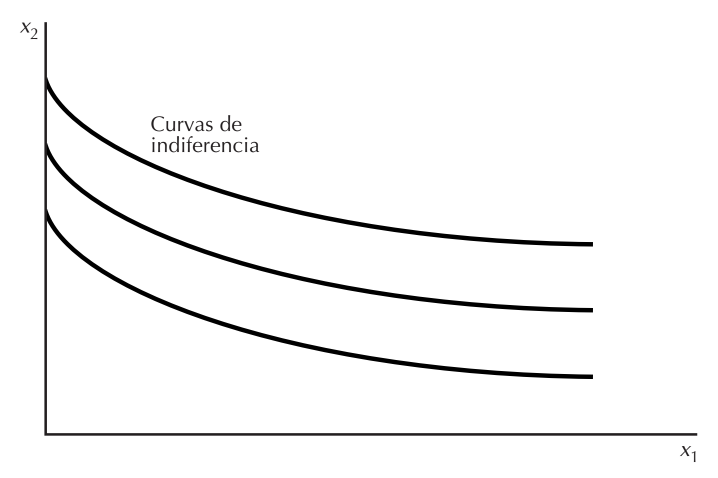


Figura 4.4. Preferencias cuasilineales. Cada una de las curvas de indiferencia es una versión desplazada verticalmente de una única curva de indiferencia.

En este caso, la forma natural de etiquetar las curvas de indiferencia consiste en llamarlas k, que es el valor de la ordenada en el origen. Despejando k e igualándolo a la utilidad, tenemos que

$$u(x_1, x_2) = k = v(x_1) + x_2.$$

En este caso, la función de utilidad es lineal en el bien 2, pero no en el 1; de ahí el nombre de **utilidad cuasilineal**, que significa utilidad "parcialmente lineal". Ejemplos concretos son $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$ o $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$. Las funciones de utilidad cuasilineal no son especialmente realistas, pero como veremos más adelante en varios ejemplos, es fácil trabajar con ellas.

Preferencias Cobb-Douglas

Otra función de utilidad que se utiliza frecuentemente es la **Cobb-Douglas**:

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d,$$

donde c y d son números positivos que describen las preferencias del consumidor.[2]

La función de utilidad Cobb-Douglas resultará útil en algunos ejemplos. Las preferencias representadas mediante esta función tienen la forma general que muestra la figura 4.5. En la 4.5A hemos representado las curvas de indiferencia correspondientes a $c = 1/2$, $d = 1/2$ y en la 4.5B las curvas de indiferencia correspondientes a $c = 1/5$, $d = 4/5$. Obsérvese que la diferencia entre los valores de los parámetros c y d da lugar a curvas de indiferencia de forma distinta.

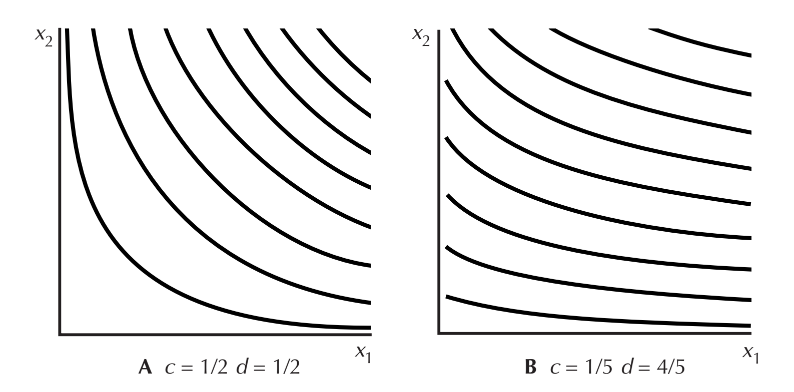


Figura 4.5. Las curvas de indiferencia Cobb-Douglas. La parte A muestra el caso en que $c = 1/2$, $d = 1/2$ y la parte B muestra el caso en el que $c = 1/5$, $d = 4/5$.

Las curvas de indiferencia Cobb-Douglas son exactamente iguales que las curvas de indiferencia monótonas convexas que en el capítulo 3 llamamos "curvas de indiferencia regulares". Las preferencias Cobb-Douglas son el ejemplo clásico de curvas de indiferencia regulares y, de hecho, la fórmula que las describe es una de las expresiones algebraicas más sencillas de todas las que generan preferencias de este tipo. Veremos que las preferencias Cobb-Douglas nos resultarán bastante útiles para presentar ejemplos algebraicos de los conceptos económicos que estudiaremos más adelante.

Naturalmente, una transformación monótona de la función de utilidad Cobb-Douglas representa exactamente las mismas preferencias, por lo que es interesante analizar un par de ejemplos de estas transformaciones.

En primer lugar, si tomamos el logaritmo natural de la utilidad, el producto de los términos se convertirá en una suma, por lo que tendremos que

$$v(x_1, x_2) = \ln(x_1^c x_2^d) = c \ln x_1 + d \ln x_2.$$

[2] Paul Douglas fue un economista del siglo XX, profesor de la Universidad de Chicago y, más tarde, senador de Estados Unidos. Charles Cobb fue matemático y profesor del Amherst College. La forma funcional Cobb-Douglas se utilizó inicialmente para estudiar la producción.

Las curvas de indiferencia de esta función de utilidad se parecerán a las de la primera función Cobb-Douglas, ya que el logaritmo es una transformación monótona (para un breve repaso de los logaritmos naturales, véase el apéndice matemático que se encuentra al final del libro).

En segundo lugar, supongamos que partimos de la forma Cobb-Douglas

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d.$$

En ese caso, elevando la utilidad a la potencia $1/(c + d)$, tenemos que

$$x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}.$$

Definamos ahora un nuevo número:

$$a = \frac{c}{c + d}.$$

Ahora podemos expresar nuestra función de utilidad de la forma siguiente:

$$v(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}.$$

Eso significa que siempre podemos tener una transformación monótona de la función de utilidad Cobb-Douglas en la que los exponentes sumen 1. Más adelante veremos que esta propiedad tiene una útil interpretación.

La función de utilidad Cobb-Douglas puede expresarse de muy distintas formas; el lector debe aprender a reconocerlas, ya que esta familia de preferencias es muy útil para entender los ejemplos.

4.4 La utilidad marginal

Consideremos el caso de un individuo que consume la cesta de bienes (x_1, x_2). ¿Cómo varía su utilidad cuando obtiene una cantidad algo mayor del bien 1? Esta tasa de variación se denomina **utilidad marginal** (UM_1) con respecto al bien 1 y se expresa como un cociente:

$$UM_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1},$$

que mide la tasa de variación de la utilidad (ΔU) provocada por una pequeña variación de la cantidad del bien 1 (Δx_1). Obsérvese que en este cálculo se mantiene fija la cantidad del bien 2.[3]

[3] En el apéndice de este capítulo se incluye una visión matemática de la utilidad marginal.

Esta definición implica que para calcular la variación de la utilidad provocada por una pequeña variación del consumo del bien 1, basta multiplicar la variación del consumo por la utilidad marginal del bien:

$$\Delta U = UM_1 \Delta x_1.$$

La utilidad marginal con respecto al bien 2 se define de una forma parecida:

$$UM_2 = \frac{\Delta U}{\Delta x_2} = \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_2}.$$

Obsérvese que cuando calculamos la utilidad marginal con respecto al bien 2 mantenemos constante la cantidad del 1. La variación de la utilidad provocada por una variación del consumo del bien 2 se calcula mediante la fórmula

$$\Delta U = UM_2 \Delta x_2.$$

Es importante darse cuenta de que la magnitud de la utilidad marginal depende de la magnitud de la utilidad. Por lo tanto, depende de la forma concreta en que decidamos medir esta última. Si la multiplicamos por 2, la utilidad marginal también se multiplicará por 2. Seguiremos teniendo una función de utilidad perfectamente válida, en el sentido de que representará las mismas preferencias, aunque a una escala distinta.

Esto significa que la utilidad marginal en sí misma no tiene ningún contenido relacionado con la conducta. ¿Cómo podemos calcularla, pues, a partir de la conducta del consumidor? La respuesta es muy simple: no podemos. La conducta sólo revela información sobre la forma en que el consumidor *ordena* las diferentes cestas de bienes. La utilidad marginal depende de la función de utilidad específica que utilicemos para reflejar la ordenación de las preferencias y su magnitud no tiene ningún significado especial. Sin embargo, como veremos en el siguiente apartado, la utilidad marginal puede servir para calcular algo que sí tiene significado en cuanto a la conducta.

4.5 La utilidad marginal y la RMS

Para medir la relación marginal de sustitución definida en el capítulo 3 se puede usar una función de utilidad $u(x_1, x_2)$. Recuérdese que la relación marginal de sustitución mide la pendiente de la curva de indiferencia correspondiente a una cesta de bienes dada; puede interpretarse como la relación en que el consumidor está dispuesto a sustituir el bien 1 por el 2.

Esta interpretación nos permite calcular fácilmente la relación marginal de sustitución. Consideremos el caso de una variación del consumo de cada bien $(\Delta x_1, \Delta x_2)$

que mantiene constante la utilidad, es decir, una variación del consumo que nos desplaza a lo largo de la curva de indiferencia. En ese caso, debe cumplirse que

$$UM_1 \Delta x_1 + UM_2 \Delta x_2 = \Delta U = 0.$$

Despejando la pendiente de la curva de indiferencia, tenemos que

$$RMS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{UM_1}{UM_2}. \qquad [4.1]$$

Obsérvese que en el primer miembro de la ecuación tenemos 2 partido por 1 y en el segundo 1 partido por 2; no se confunda el lector.

El signo algebraico de la RMS es negativo, ya que si obtenemos una mayor cantidad del bien 1, tenemos que recibir una cantidad *menor* del 2 para conservar el mismo nivel de utilidad. Sin embargo, para no tener que recordar la existencia de ese engorroso signo negativo, los economistas prefieren, por lo general, expresar la RMS en su valor absoluto, es decir, como un número positivo. Seguiremos esta convención mientras no cree confusiones.

He aquí la característica interesante del cálculo de la RMS: la relación marginal de sustitución puede medirse observando la conducta real de los individuos; como vimos en el capítulo 3, se obtiene la relación de intercambio que les deja en el mismo nivel de utilidad.

La función de utilidad y, por lo tanto, la función de utilidad marginal no son únicas. Cualquier transformación monótona de una función de utilidad nos proporciona otra función de utilidad igualmente válida. Así, por ejemplo, si multiplicamos la utilidad por 2, la utilidad marginal se multiplica por 2. Por lo tanto, la magnitud de la función de utilidad marginal depende de la elección de la función de utilidad, que es arbitraria. Es decir, no depende solamente de la conducta sino de la función de utilidad que empleemos para describirla.

Pero el *cociente* de las utilidades marginales nos proporciona una magnitud observable, a saber, la relación marginal de sustitución. Dicho cociente no depende de la transformación específica de la función de utilidad que decidamos emplear. Veamos qué ocurre si multiplicamos la utilidad por 2. La relación marginal de sustitución se convierte en

$$RMS = -\frac{2UM_1}{2UM_2}.$$

Los 2 se eliminan, por lo que la RMS sigue siendo la misma.

Lo mismo ocurre cuando tomamos una transformación monótona cualquiera de una función de utilidad. Tomar una transformación monótona equivale a etiquetar de nuevo las curvas de indiferencia, mientras que el cálculo de la relación marginal de sustitución mostrado antes se refiere al desplazamiento a lo largo de una curva de indife-

rencia dada. Incluso aunque las transformaciones monótonas alteren las utilidades marginales, el *cociente* de las utilidades marginales es independiente de la forma concreta que se elija para representar las preferencias.

4.6 Aplicación de la utilidad al transporte

Las funciones de utilidad son esencialmente instrumentos para describir la conducta de los consumidores: si se elige una cesta de bienes X cuando existe una cesta de bienes Y, X debe tener una mayor utilidad que Y. Examinando las elecciones de los consumidores, podemos estimar una función de utilidad que describa su conducta.

Esta idea se ha utilizado frecuentemente en el campo de la economía del transporte para estudiar la conducta de los consumidores en sus desplazamientos al trabajo. En la mayoría de las ciudades, la gente tiene la posibilidad de utilizar el transporte público o el vehículo particular para ir a trabajar. Imaginemos que cada una de estas opciones representa una cesta de características diferentes: tiempo del recorrido, tiempo de espera, coste, comodidad, etc. Sea x_1 la cantidad de tiempo que tarda cada tipo de transporte en llevarnos al trabajo, x_2 la cantidad de tiempo de espera de cada uno, etc.

Si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ representa los valores de n características diferentes del empleo del automóvil particular, por ejemplo, y $(y_1, y_2, ..., y_n)$ representa los valores correspondientes a la utilización del autobús, podemos analizar un modelo en el que el consumidor decida utilizar su automóvil o el autobús dependiendo de que prefiera una cesta a otra.

Más concretamente, supongamos que las preferencias del consumidor medio pueden representarse mediante una función de utilidad de la forma

$$U(x_1, x_2, ..., x_n) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n,$$

donde los coeficientes β_1, β_2, etc., son parámetros desconocidos. Naturalmente, cualquier transformación monótona de esta función de utilidad describiría, por supuesto, la conducta del consumidor igualmente bien, pero la forma lineal es especialmente fácil de utilizar desde el punto de vista estadístico.

Supongamos ahora que observamos la conducta de una serie de consumidores parecidos que eligen entre el automóvil particular y el autobús basándose en los valores concretos de los tiempos de recorrido, costes, etc., de cada medio de transporte. Existen técnicas estadísticas para hallar los valores de los coeficientes β_i para $i = 1, ..., n$, que mejor se ajusten al tipo de elecciones observadas en una serie de consumidores. Estas técnicas estadísticas permiten estimar la función de utilidad de diferentes medios de transporte.

Según un estudio, la función de utilidad estimada era la siguiente:[4]

$$U(TW, TT, C) = -\,0{,}147TW - 0{,}0411TT - 2{,}24C, \qquad [4.2]$$

donde

TW = tiempo total que se tarda en llegar andando hasta la parada del autobús o hasta el automóvil y en volver;
TT = tiempo total del recorrido en minutos;
C = coste total del recorrido en dólares.

La función de utilidad estimada en el libro de Domenich y McFadden describía correctamente la elección entre el transporte en automóvil y el transporte en autobús en el caso del 93% de las economías domésticas de su muestra.

Los coeficientes de las variables de la ecuación [4.2] describen el valor que da una familia media a las diferentes características; es decir, la utilidad marginal de cada característica. El *cociente* entre un coeficiente y otro mide la relación marginal de sustitución entre una característica y otra. Por ejemplo, el cociente entre la utilidad marginal de TW y la utilidad marginal de TT indica que el consumidor medio considera que el tiempo que tiene que andar es aproximadamente tres veces más oneroso que el tiempo del recorrido. En otras palabras, el consumidor estaría dispuesto a tardar tres minutos más en hacer el recorrido para ahorrar un minuto de desplazamiento a pie.

Del mismo modo, el cociente entre el coste y el tiempo del recorrido indica la relación de intercambio del consumidor medio entre estas dos variables. En este estudio, el individuo medio valoraba el tiempo del recorrido en $0{,}0411/2{,}24 = 0{,}0183$ dólares por minuto, lo que equivale a 1,10 dólares por hora. A título de comparación, el salario por hora del individuo medio de la muestra era de unos 2,85 dólares por hora cuando se realizó el estudio.

Esas funciones de utilidad estimadas pueden ser muy valiosas para averiguar si merece la pena o no modificar el sistema de transporte público. Por ejemplo, en la función de utilidad anterior uno de los factores importantes para explicar la elección del medio de transporte es el tiempo que se tarda en realizar el recorrido. Las autoridades responsables del transporte urbano pueden poner más autobuses para reducir este tiempo, con el consiguiente aumento del coste. Pero ¿justifica el número de viajeros adicionales el incremento de los gastos?

[4] Véase Thomas Domenich y Daniel McFadden, *Urban Travel Demand*, North-Holland Publishing Company, 1975. El procedimiento de estimación de este libro también incluye varias características demográficas de las economías domésticas, además de las variables puramente económicas que describimos aquí. Daniel McFadden recibió el Premio Nobel de economía en 2000 por sus técnicas para estimar modelos de este tipo.

Dada una función de utilidad y una muestra de consumidores, podemos predecir cuáles utilizarán su automóvil y cuáles decidirán ir en autobús, lo que nos indica aproximadamente si los ingresos serán suficientes para cubrir el coste adicional.

También podemos utilizar la relación marginal de sustitución para estimar el *valor* que da cada consumidor a la reducción del tiempo del recorrido. Antes vimos que en el estudio de Domenich y McFadden de 1967 el individuo medio valoraba el tiempo de recorrido a una tasa de 1,10 dólares por hora. Por lo tanto, debería estar dispuesto a pagar alrededor de 0,37 dólares para reducir en 20 minutos su recorrido. Esta cifra nos da una medida del beneficio monetario del crecimiento de la frecuencia del servicio de autobús. Este beneficio debe compararse con el coste de ofrecer un servicio de autobús más frecuente con el fin de averiguar si merece la pena. Ciertamente es útil contar con una medida cuantitativa del beneficio para tomar una decisión racional sobre la política de transporte.

Resumen

1. Una función de utilidad es simplemente una forma de representar o de resumir una ordenación de las preferencias. Las magnitudes numéricas de los niveles de utilidad no tienen ningún significado intrínseco.
2. Por lo tanto, dada una función de utilidad cualquiera, su transformación monótona representa las mismas preferencias.
3. La relación marginal de sustitución puede calcularse a partir de la función de utilidad mediante la fórmula $RMS = \Delta x_2/\Delta x_1 = -\,UM_1/UM_2$.

Problemas

1. En este capítulo decimos que elevar un número a una potencia impar es una transformación monótona. ¿Qué ocurre cuando elevamos un número a una potencia par? ¿Es una transformación monótona? (Pista: considere el caso $f(u) = u^2$.)
2. De los siguientes ejemplos, ¿cuáles son transformaciones monótonas? (1) $u = 2v - 13$; (2) $u = -1/v^2$; (3) $u = 1/v^2$; (4) $u = \ln v$; (5) $u = -\,e^{-v}$; (6) $u = v^2$; (7) $u = v^2$ cuando $v > 0$; (8) $u = v^2$ cuando $v < 0$.
3. En este capítulo afirmamos que si las preferencias fueran monótonas, una diagonal que pasara por el origen cortaría a cada curva de indiferencia exactamente una vez. ¿Puede probarlo rigurosamente? (Pista: ¿qué ocurriría si cortara alguna curva de indiferencia dos veces?)
4. ¿Qué tipo de preferencias se representa mediante una función de utilidad de la forma $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$? ¿Y mediante la función de utilidad $v(x_1, x_2) = 13x_1 + 13x_2$?

5. ¿Qué tipo de preferencias se representa mediante una función de utilidad de la forma $u(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$? ¿Es la función de utilidad $v(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1\sqrt{x_2} + x_2$ una transformación monótona de $u(x_1, x_2)$?
6. Considere la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. ¿Qué tipo de preferencias representa? ¿Es la función $v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ una transformación monótona de $u(x_1, x_2)$? ¿Es la función $w(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ una transformación monótona de $u(x_1, x_2)$?
7. ¿Puede explicar por qué una transformación monótona de una función de utilidad no altera la relación marginal de sustitución?

Apéndice

Aclaremos primero qué significa "utilidad marginal". Como siempre en economía, "marginal" no significa más que una derivada. Por lo tanto, la utilidad marginal del bien 1 es

$$UM_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}.$$

Obsérvese que aquí utilizamos la derivada *parcial*, ya que la utilidad marginal del bien 1 se calcula manteniendo fijo el bien 2.

Ahora ya podemos volver a expresar la derivación de la relación marginal de sustitución de este capítulo mediante un cálculo. Lo haremos de dos formas, primero utilizando diferenciales y después utilizando funciones implícitas.

Por lo que se refiere al primer método, consideremos una variación (dx_1, dx_2) que mantenga constante la utilidad. Por lo tanto, queremos que

$$du = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0 .$$

El primer término mide el incremento de la utilidad generado por la pequeña variación de x_1 y el segundo mide el incremento de la utilidad generado por la pequeña variación de x_2. Nos interesa elegir estas variaciones para que la variación total de la utilidad, du, sea cero. Despejando dx_2/dx_1, tenemos que

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} ,$$

que es igual que la ecuación [4.1] de este capítulo, pero expresada en la notación del cálculo diferencial.

Por lo que se refiere al segundo método, consideremos ahora que la curva de indiferencia se describe mediante la función $x_2(x_1)$. Es decir, la función $x_2(x_1)$ nos dice qué cantidad de x_2 necesitamos, dado x_1, para alcanzar esa curva de indiferencia específica. Por lo tanto, la función $x_2(x_1)$ tiene que satisfacer la identidad

$$u(x_1, x_2(x_1)) \equiv k,$$

donde k es el nivel de utilidad de la curva de indiferencia en cuestión.

Si derivamos los dos miembros de esta identidad con respecto a x_1, obtenemos

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2 (x_1)}{\partial x_1} = 0.$$

Obsérvese que x_1 aparece en dos lugares de esta identidad, por lo que cambiando x_1 cambiará la función de dos formas y tendremos que tomar la derivada en cada uno de los lugares en los que aparece x_1.

A continuación despejamos $\partial x_2 (x_1)/ \partial x_1$ en esa ecuación y hallamos que

$$\frac{\partial x_2 (x_1)}{\partial x_1} = - \frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2},$$

que es exactamente el mismo resultado que obtuvimos antes.

El método de la función implícita es algo más riguroso, pero el del cálculo diferencial es más directo, siempre que no se haga ninguna tontería.

Supongamos que tenemos, por ejemplo, una transformación monótona de la función de utilidad $v(x_1, x_2) = f(u(x_1, x_2))$. Calculemos la RMS de esta función de utilidad. Utilizando la regla de la derivación en cadena

$$\begin{aligned} RMS = - \frac{\partial v/\partial x_1}{\partial v/\partial x_2} &= - \frac{\partial f/\partial u}{\partial f/\partial u} \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} \\ &= - \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}, \end{aligned}$$

ya que el término $\partial f/\partial u$ se anula tanto en el numerador como en el denominador. Este resultado demuestra que la RMS es independiente de la representación de la utilidad.

Este método es útil para reconocer las preferencias representadas por funciones de utilidad diferentes: dadas dos funciones de utilidad, basta calcular las relaciones marginales de sustitución y ver si son iguales. Si lo son, las dos funciones de utilidad tienen las mismas curvas de indiferencia. Si en ambas funciones el aumento de la utilidad va en la misma dirección, las preferencias subyacentes deben ser las mismas.

Ejemplo: Las preferencias Cobb-Douglas

En el caso de las preferencias Cobb-Douglas es fácil calcular la relación marginal de sustitución utilizando la fórmula derivada antes.

Si elegimos la representación logarítmica en la que

$$u(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} RMS &= -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} \\ &= -\frac{c/x_1}{d/x_2} \\ &= -\frac{c}{d}\frac{x_2}{x_1}. \end{aligned}$$

Obsérvese que en este caso la RMS sólo depende del cociente entre los dos parámetros y de la cantidad de los dos bienes.

¿Qué ocurre si elegimos la representación exponencial en la que

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d?$$

En ese caso, tenemos que

$$\begin{aligned} RMS &= -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} \\ &= -\frac{c x_1^{c-1} x_2^d}{d x_1^c x_2^{d-1}} \\ &= -\frac{c x_2}{d x_1}, \end{aligned}$$

que es lo mismo que teníamos antes. Naturalmente, el lector ya sabía que una transformación monótona no podía alterar la relación marginal de sustitución.